1. Kombinatorika - příklady

Úlohy k samostatnému řešení

1.1. Zjednodušte a vypočtěte:

$$\binom{4}{2}+\binom{6}{2}-\binom{7}{2}=$$

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{7}{5}=$$

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-\frac{2(n+2)!}{n!}=$$

$$\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}=$$

$$\frac{(n+2)!}{n!}-\frac{2(n+1)!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!}=$$

$$\binom{x+2}{x}+\binom{x+3}{x+1}=64$$

$$\binom{x+3}{x+1}-2\binom{x+2}{x}+3\binom{x+4}{x+2}=75$$

1.2. Kolik třítónových akordů je možné zahrát z 8 tónů?

1.3. Kolik různých optických signálů je možno dát vytahováním 5 různých barevných vlajek, je-li vždy všech pět vlajek nahoře?

1.4. Zjistěte, kolik existuje různých kvádrů, pro něž platí, že délka každé jejich hrany je přirozené číslo z intervalu $\langle 2,15 \rangle$

1.5. V obchodě mají tři druhy bonbónů v sáčcích po 100g. Kolika způsoby může zákazník koupit 1 kg bonbónů?

1.6. Kolik různých státních poznávacích značek z jedné série existuje s aspoň dvěma trojkami?

1.7. Ze 7 prvků bylo vytvořeno 2401 variací s opakováním stejné třídy. Kolik prvků obsahuje jedna variace?

1.8. Jsou dány cifry: 1, 2, 3, 4, 5. Cifry nelze opakovat. Kolik je možno vytvořit z těchto cifer čísel, která jsou

a) pětimístná, sudá

b) pětimístná, končící dvojčíslím 21

c) pětimístná, menší než 30 000

d) trojmístná, lichá

e) čtyřmístná, větší než 2000

f) čtyřmístná, začínající cifrou 2

g) čtyřmístná, sudá nebo končící cifrou 3

h) dvojmístná nebo trojmístná

1.9. Jsou dány cifry: 0, 1, 2, 3, 4. Splňte úkoly minulé úlohy (1.8.) tak, že cifry se nesmí opakovat a číslo nemůže začínat nulou.

1.10. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiferných přirozených čísel?

1.11. Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

1.12. Kolik prvků dá 120 kombinací druhé třídy s opakováním?

1.13. Kolik je dáno prvků, jestliže variací třetí třídy z nich utvořených je pětkrát více než variací druhé třídy?

1.14. Z kolika prvků lze vytvořit 90 variací druhé třídy?

1.15. Z kolika prvků lze vytvořit 55 kombinací druhé třídy?

1.16. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací čtyřicetdvakrát. Určete počet prvků.

1.17. Z kolika prvků lze vytvořit padesátkrát více variací třetí třídy než variací druhé třídy?

1.18. Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet kombinací druhé třídy o 17. Určete počet prvků.

1.19. Zvětší-li se počet prvků o 8, zvětší se počet kombinací druhé třídy jedenáctkrát. Určete počet prvků.

1.20. Zmenší-li se počet prvků o 1, zmenší se počet permutací z těchto prvků desetkrát. Určete počet prvků.

1.21. Kolik permutací z n prvků $a_1, a_2, \dots, a_n$ obsahuje prvek a_1 na prvé pozici.?

1.22. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit

a) 10 pohlednic,

b) 5 pohlednic,

c) 5 různých pohlednic?

1.23. V knihkupectví prodávají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit

a) 4 knižní novinky,

b) 5 různých knižních novinek?

1.24. Na hokejovém turnaji, kterého se účastní 8 družstev, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?

1.25. Z 5 bílých a 4 červených kuliček tvoříme trojice tak, aby v každé trojici byly vždy 2 bílé a 1 červená kulička.. Kolik trojic splňujících tuto podmínku lze vytvořit?

1.26. Hokejový tým odjel na OH s 23 hráči, a to s 12 útočníky, 8 obránci a 3 brankáři. Kolik různých sestav může trenér teoreticky vytvořit?

1.27. Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže

a) žádné tři z nich neleží v přímce,

b) tři z nich leží v jedné přímce?

1.28. Kolik kružnic je určeno 10 body v rovině, jestliže žádné tři z nich neleží na přímce a žádné čtyři z nich neleží na kružnici?

1.29 Kolik různých hodů můžeme provést

a) dvěma,

b) třemi různobarevnými kostkami?

1.30. V turistickém oddílu "Hbitý svišť" je 10 dívek a 8 chlapců. Určete, kolika způsoby mohou sestavit volejbalový tým (má šest členů), ve kterém budou hrát

a) právě dvě dívky.

b) maximálně dva chlapci.

1.31. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiferných přirozených čísel?

1.32. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

1.33. Kolikrát více je variací k-té třídy z n prvků než kombinací k-té třídy z těchto prvků?

1.34. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.

a) Kolika způsoby je lze přesadit?

b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?

c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?

d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?

1.35. Student má v knihovně 4 různé učebnice pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?

1.36. Kolika způsoby lze rozdělit 8 účastníků finále v běhu na 100 m do 8 drah?

1.37. Kolik různých permutací lze vytvořit použitím všech písmen slova

a) statistika,

b) matematika?

1.38. Kolik různých signálů je možno vytvořit použitím pěti různobarevných praporků, použijeme-li
a) pouze 3 praporky,
b) 2 praporky?

1.39. Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

1.40. Kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník?

1.41. V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

1.42. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat 3 pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?

1.43. Kolika způsoby je možno na šachovnici s 64 poli vybrat 3 pole tak, aby všechna neležela v jednom sloupci?

1.44. V prostoru jsou dány 2 mimoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, \dots A_m$, na přímce b n různých bodů $B_1, \dots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to v bodech A_i, B_j.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.1. 0, 56, 2, 0, 2, 6, 4
1.2. 56
1.3. 120
1.4. 560
1.5. 66
1.6. 523
1.7. 4
1.8. 48, 6, 48, 36, 96, 24, 72, 80
1.9. 60, 4, 48, 18, 72, 24, 78, 64
1.10. 90 000
1.11. 62
1.12. 15
1.13. 7
1.14. 10
1.15. 11
1.16. 7
1.17. 52
1.18. 8
1.19. 4
1.20. 10
1.21. (n-1)!
1.22. $C_{10}(16)$; $C_5(11)$; 21
1.23. $C_4(13)$; $C_5(10)$
1.24. 28
1.25. 40
1.26. 18 480
1.27. 21; 19
1.28. 120
1.29. 36; 216
1.30. 3150; 8106
1.31. 90 000
1.32. 90
1.33. k!
1.34. 720; 240; 240; 96
1.35. 1 728
1.36. 40 320
1.37. 75 600, 151200
1.38. 60; 20
1.39. 10
1.40. n/2*(n-3)
1.41. 231
1.42. 31 744
1.43. 41 216
1.44. $C_2(m).C_2(n)$