Sbírka příkladů z m a t e m a t i k y

Příprava k profilové části maturitní zkoušky

školní rok 2012/2013

1. Algebraické výrazy

1) Rozložte na součin: a) $a^{n+1}-3a^n$ b) b^3+b^2-2b c) a^3+2a^2-a-2
d) b^3-4b^2-21b e) $a^{n+1}-10a^n$ f) b^3+5b^2+6b

2) Upravte: a) $\left(3+c\right)^3$ b) $8-d^3$ c) $\left(2+c\right)^3$ d) $27+d^3$

3) Určete definiční obor: a) $\dfrac{1}{a^3+2a^2-a-2}$ b) $\sqrt{b^2-4b-21}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{10-c^2}}$
d) $\dfrac{1}{a^3-9a}$ e) $\sqrt{5c-c^2}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{b^4+b^3-2b^2}}$

U všech dalších příkladů určete definiční obor a upravte:

4) $6a+\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right):\dfrac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$ a≠0;±2, $(a+2)^2$

5) $2a-\left(\dfrac{2a-3}{a+1}-\dfrac{a+1}{2-2a}-\dfrac{a^2+3}{2a^2-2}\right)\cdot\dfrac{a^3+1}{a^2-a}$ a≠0;±1, $\dfrac{2a-2}{a}$

6) $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}.\left(\dfrac{\left(a+2\right)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)=$

7) $\dfrac{\left(a^2+2a\right)^2-\left(2a+4\right)^2}{\left(a^2-2a\right)^2-\left(2a-4\right)^2}:\left(2:\dfrac{a^2+a-6}{a^2+5a+6}\right)=$

8) $\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(x^2-y^2\right)}{\dfrac{x^4}{y^2}-\dfrac{y^4}{x^2}}$ x≠0, y≠0, $x^3\neq\pm y^3$, 1

9) $x^2y^2\left[\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right]$ x≠0, y≠0, x≠-y, 1

10) a) $\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt[5]{b^4}\,\sqrt[3]{b^2}}:\dfrac{\sqrt{b}.b^{-1}}{\sqrt[3]{b}}=$

b) $\dfrac{\sqrt{a^3}.a^{-1}.\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b^2}}=$

2. Mocniny a odmocniny v R, mocninné funkce

U všech příkladů určete definiční obor a upravte:

1) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{y^{-1}}} : \sqrt[3]{y^2\cdot\sqrt{x^3}} + \dfrac{\sqrt[6]{y}}{y}$ x>0, y>0, $\dfrac{2\cdot\sqrt[6]{y}}{y}$

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}} - \dfrac{b^{-1}}{a^{-\frac{2}{3}}}\right) : \left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right) - a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$ a>0, b>0, $a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

3) $\dfrac{a^{\frac{-1}{3}}.\sqrt{a}.a^{\frac{3}{4}}}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}} : \left[\sqrt[3]{b^2}.\left(b^{-1}\right)^{-2}\right]$

4) $\left[\left(a^{0,5}+b^{0,5}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{1,5}-b^{1,5}}\right)^{-1}\right]\cdot\left(ab\right)^{-0,5}$ a>0, b>0, a≠b, 1

5) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} + 4\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}} - 2x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 3x\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}$ x>0, $6\cdot\sqrt[6]{x^5}$

6) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{a^2\cdot\sqrt[4]{2}}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6a}}{3\cdot\sqrt[8]{a^5}}$ a>0, a

7) $\left(\dfrac{16e^{-1}-9e}{4e^{-0,5}-3e^{0,5}} + \dfrac{16e-9e^{-1}}{4e^{0,5}-3e^{-0,5}} - \dfrac{e-e^{-1}}{e^{0,5}-e^{-0,5}}\right) : \left(e^{0,5}+e^{-0,5}\right)$ e>0, e≠1; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{3}$, 6

8) Vypočtěte: $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{8}}}$

9) Sestrojte grafy daných funkcí a vypočtěte souřadnice jejich průsečíků s osami x, y:
a) f: $y=\left(x-2\right)^3+1$ b) g: $y=\left(x+2\right)^{-2}-1$

10) Upravte rovnice daných funkcí a sestrojte jejich grafy:
a) f: $y=\dfrac{x^3.\left(-x\right)^4}{x^2.\left(-x\right)}$ b) g: $y=\dfrac{x^3.\left(-x\right)^5}{x^2.\left(-x\right)^2}$

3. Lineární funkce, lineární rovnice a nerovnice

1) Pro lineární funkci platí: $f(-1)=3$, $f(2)=-2$. Určete její předpis a vypočtěte $f(4)$.

2) Pro lineární funkci platí: $f(-1)=4$, $f(3)=-5$. Určete její předpis,vypočtěte souřadnice průsečíků grafu funkce se souřadnicovými osami a zjistěte, pro která $x \in D(f)$ je f(x) = 2.

3) Určete lineární funkci f, pro níž platí: f(x+1) - f(x) = 2, f(0) = 3. Sestrojte graf funkce.
[y=2x+3]

4) Řešte v R: a) $\sqrt{5}(1+x)=\sqrt{3}(x-1)$

b) $\sqrt{20}(1+x)=2\sqrt{5}(x-1)$

c) $\sqrt{2}(1-x)=\sqrt{5}(x+1)$

d) $\sqrt{45}(1-x)=3\sqrt{5}(2-x)$

5) Řešte v R: $5+\dfrac{3}{3x-12}=\dfrac{5-x}{x-4}$

6) Řešte v R: $7-2x-\dfrac{1-3x}{7}=2-\dfrac{2x-1}{3}$

7) Řešte v R: $3\left[2(3x-6)-2(4x-5)+1\right]-3=6\left[3-8(x-3)\right]$

8) Řešte v R: $\dfrac{4}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{(x+1)}{x-1}$

9) Řešte v R i v N: $\dfrac{2x-17}{4}-\dfrac{8-x}{2}-2\leq\dfrac{x}{8}-4+x$

10) Řešte v R i v N: $\dfrac{5-2x}{3}+3\leq\dfrac{3x-8}{4}-x$

4. Kvadratické funkce, kvadratické rovnice a nerovnice

1) Načrtněte grafy funkcí:

$y = x^2 - 3$ $\qquad$ $y = \left| x^2 - 3 \right|$ $\qquad$ $y = (x-3)^2$

$y = -x^2$ $\qquad$ $y = x^2 + 2$ $\qquad$ $y = (x+2)^2 - 3$

2) Sestrojte graf funkce f: $y = -x^2 - 4x - 3$, určete souřadnice vrcholu, souřadnice průsečíků grafu funkce s osami souřadnicového systému.

3) Sestrojte graf funkce f: $y = 2x^2 - 8x + 9$, určete souřadnice vrcholu, souřadnice průsečíků grafu funkce s osami souřadnicového systému.

4) Určete všechny kvadratické rovnice, jejichž: a) kořeny jsou čísla $\frac{3}{4}$ a –5

b) dvojnásobným kořenem je číslo $\frac{2}{5}$.

5) Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny čísla převrácená ke kořenům rovnice $x^2 - 6x + 8 = 0$ bez výpočtu kořenů dané rovnice. Proveďte zkoušku.

6) Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny čísla o tři větší než kořeny rovnice $x^2 - 6x + 5 = 0$ bez výpočtu kořenů dané rovnice. Proveďte zkoušku.

7) Řešte v R: $x^2 - 3x + 4 \geq 0$

8) Řešte v R: $15 - 2x - x^2 \geq 0$

9) Řešte v R: $4x^2 + 4x + 1 < 0$

10) Řešte v R: $2 - x - x^2 \geq 0$

5. Lineární lomená funkce, rovnice a nerovnice v podílovém tvaru

1) Určete obory a sestrojte graf funkce f: y = $\dfrac{x+2}{x+3}$.

[O'[-3;1], D(f)=R-{-3}, H(f)=R-{1}]

2) Určete obory a sestrojte graf funkce f: y = $\dfrac{2x+3}{x+1}$.

[O'[-1;2], D(f)=R-{-1}, H(f)=R-{2}]

3) Sestroj graf funkce: $y=\dfrac{3-x}{x+2}$, urči její definiční obor, obor hodnot, souřadnice středu souměrnosti, rovnice asymptot, průsečíky s osami.

4) Sestroj graf funkce: $y=\dfrac{4-x}{x-2}$, urči její definiční obor, obor hodnot, souřadnice středu souměrnosti, rovnice asymptot, průsečíky s osami.

5) Řešte v R: $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-x-30}\geq 0$

6) Řešte v R: $\dfrac{2-10x}{x+4}<2$

7) Řešte v R: $\dfrac{x^2+4x+4}{x(x-1)}\geq 0$

8) Řešte v R: $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-10x-25}\leq 0$

9) Řešte v R: $\dfrac{(x-7)(2-x)-5(x-7)-(7-x)^2+(x-7)}{x^2+7}=0$

10) Řešte v R: $(-2)(x^2-5x+6)(x-7)\leq 0$

6. Iracionální funkce, rovnice a nerovnice

1) Načrtněte grafy funkcí:

$y=\sqrt[3]{x}$ $\quad$ $y=\sqrt{-x}$ $\quad$ $y=\sqrt{x+2}$

$y=-\sqrt{x}+1$ $\quad$ $y=\sqrt{x-1}+2$ $\quad$ $y=(-1)\sqrt{x+1}$

2) Určete definiční obor funkce : a) f: $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$

b) g: $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^3-5x^2}}$

3) Určete definiční obor funkce : a) f: $y=\sqrt{4x^2-1}$

b) g: $y=\sqrt{10+3x-x^2}$

4) Řešte v R: $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$

5) Řešte v R: $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$

6) Řešte v R: $\sqrt{2x+1+2\sqrt{2x+3}}=1$

7) Řešte v R: $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$

8) Řešte v R: $\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}=-\dfrac{5}{6}$

9) Řešte v R: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

10) Řešte v R: $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{9x^2+7x}+x^3+3x^2}}{x+1}=1$

7. Funkce, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

1) Upravte, zjednodušte výrazy: a) $|x-1|-2|x|+|2-x|$

b) $2|x+1|-3|1-x|$

2) Načrtněte grafy funkcí:

$y=|x^3|+1$, $y=|x^3+1|$ $y=(-1)|x^3|$

$y=\left|\frac{1}{x}\right|-2$ $y=\frac{1}{|x-2|}$ $y=\frac{1}{|x|-2}$

3) Sestrojte graf funkce f: $y=|x-1|-2|x|+|2-x|$

4) Sestrojte graf funkce f: $y=|-x^2+4x+1|$

5) Sestrojte graf funkce f: $y=\left|\frac{1}{2}x^2+4x+6\right|$

6) Řešte v R: $|3x-2| - 5 = |x+1|$ -1; 4

7) Řešte v R: $2|x+1|-3|1-x| = 2$

8) Řešte v R: a) $|1-x|\ge 3|x+3|$

b) $|x|\le |x-1|+\frac{1}{3}$

9) Řešte v R: $|x^2 - 2x - 3| \le 3(x - 1)$ <2; 5>

10) Řešte graficky: a) $|1-x|\ge 3$

b) $|2x-4|\le 10$

8. Soustavy rovnic a nerovnic

Řešte v R^2 :

1)
$$\frac{2}{x-2y}=\frac{3}{2x-y}$$
$$\frac{4x-2y}{3(x-2y)}=1$$

2)
$$\frac{1}{3}(2x-3y)-\frac{1}{4}(x-2y+3)=3$$
$$\frac{3}{4}(x+1)+\frac{1}{3}(4x-2y-3)=6+y$$

3)
$$3^{\log x}+5^{\log y}=14$$
$$3^{2\log x}-5^{2\log y}=56$$

4)
$$\frac{1}{3-x+2y}+\frac{1}{3+x-2y}=\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{3+x-2y}-\frac{1}{3-x+2y}=\frac{1}{4}$$

5)
$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}=\frac{1}{2}$$

6)
$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$$
$$2\sqrt{x+y}-3\sqrt{x-y}=3$$

7) $x^2 + xy = 25$
$2x + 3y = 10$

[5; 0], [-15; $\frac{40}{3}$]

8) $xy = 4$
$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 16$

[2; 2], [-2; -2]

Řešte v R:

9) a)
$$\frac{-3}{x+3}<0$$
$$x(x-2)\le 0$$

b)
$$|x+4|\le 3$$
$$3^x\ge 0$$

10) a) $\frac{2-x}{x^4}\le 0 \quad \wedge \quad x(x-5)<0$

b) $|x+2|>1 \wedge \log x\ge 0$

9. Exponenciální a logaritmická funkce a rovnice

1) Načrtněte grafy funkcí:

$y = 2^{-x}$ $\quad$ $y = 2^{|x|}$ $\quad$ $y = 2^{x-1} - 2$

$y = 3^{-|x|}$ $\quad$ $y = 3^{-|x|+x}$ $\quad$ $y = \dfrac{3^x}{3}$

2) Určete definiční obor funkce:

a) f: $y = \dfrac{1}{\log\left(x^2 - 3\right)}$ $\qquad$ b) g: $y = \log\left(-5x^2 + 4x + 1\right)$

3) Vypočtěte:

a) $\log_4 16^{-\frac{1}{2}} + 25^{\log_{25} 5} + \left(\log_2 6 + \log_2 \dfrac{2}{3}\right) =$

b) $\log_2 \dfrac{1}{2} + \left(\log 1600 - \log 16\right)$

Řešte v R:

4) a) $3^x + 3^{x+1} = 108$ $\qquad$ b) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$ $\qquad$ 3

5) a) $8^{x+1} . \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{3x-1} . 4$ $\qquad$ b) $4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$ $\qquad$ 12

6) a) $\dfrac{64}{25} \cdot \left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$ $\qquad$ $\dfrac{2}{3}$; 4

b) $\dfrac{1}{2} \cdot 9^{1-x} + 3 \cdot 4^{-x} = 6 \cdot 4^{1-x} - \dfrac{1}{3} \cdot 9^{2-x}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}$

7) $\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$

8) $\log(2x+9) - 2\log x + \log(x-4) = 2 - \log 50$

9) $\log_4\left(3x+2\right) - 2\log_4 x = 2 - \log_4 8$

10) $\log^2_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right) + 5\log_{\frac{1}{2}}\left(x+1\right) = 6$

10. Goniometrické funkce

1) Načrtněte grafy funkcí: f: $y = |\sin x|$

g: $y = \sin|x|$

2) Načrtněte grafy funkcí: f: $y = \sin 2x$

g: $y = \sin|x| - \sin x$

3) Načrtněte grafy funkcí: f: $y = \cos\frac{1}{2}x$

g: $y = \frac{1}{2}\cos x$

4) Načrtněte grafy funkcí: f: $y = |\cos x|$

g: $y = |\cos x| - \cos x$

5) Načrtněte graf funkce a určete její obory: f: $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

6) Načrtněte graf funkce a určete její obory: f: $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

7) Načrtněte graf funkce a určete její obory: f: $y = \frac{-\sin x}{|\sin x|}$

8) Načrtněte graf funkce a určete její obory: f: $y = tg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

9) Načrtněte graf funkce a určete její obory: f: $y = |\cot g\, 0{,}5x|$

10) Určete: $\cos\frac{13}{3}\pi$, $\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right)$, $\mathrm{tg}\frac{19}{6}\pi$, $\mathrm{cotg}\frac{11}{3}\pi$

11. Úpravy goniometrických výrazů, goniometrické rovnice

1) Bez výpočtu argumentu určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li $\sin x = \frac{5}{13}$, $x \in \langle 810°, 900° \rangle$.

2) Bez výpočtu argumentu určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li dáno $\cos x = -\frac{3}{5}$, $x \in \left\langle 3\pi, \frac{9}{2}\pi \right\rangle$.

3) Uveďte definiční obor a dokažte:

a) $\frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1+tgx}{1-tgx}$

b) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = \cos 2x$

Řešte v R:

4) a) $2\sin x \cos x = 1$

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = -tgx$

5) a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) $\sin^2 x + 3\cos^2 x + \cos x = 1$

7) $(2\sin x - \cos x)\cdot(1+\cos x) = \sin^2 x$

8) $tg^2x + \sin^2 x + \cos^2 x = 2$

9) $4\sin^2 x - tg^2x = 1$

10) $\sin x - \sin 2x + 2\cos x - 1 = 0$

12. Základní geometrické útvary v rovině, konstrukční úlohy

1) a) Trojúhelník ABC má obvod 26 cm, strana a = 6,5 cm, strana b = 11 cm. Uspořádejte úhly tohoto trojúhelníka podle velikosti, ale neurčujte jejich velikost.

   b) Jsou dány rozměry: a = 6 cm, b = 8 cm. Určete, jakých hodnot může nabývat třetí strana trojúhelníka ABC.

   c) V trojúhelníku ABC známe těžnice t_a= 9 cm, t_b= 6 cm. Jakých hodnot může nabývat délka strany a?

2) Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, odvěsna a = 10 cm, b = 24 cm. Vypočtěte obsah trojúhelníka. Určete poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

3) Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, s odvěsnou 4 cm. Vypočtěte obsah trojúhelníka. Určete poloměr kružnice trojúhelníku opsané a poloměr kružnice vepsané.

4) Kosočtverec je dán svým obsahem S = 150 cm^2 a poměrem úhlopříček e : f = 3 : 4. Vypočítejte délky úhlopříček, stranu a výšku kosočtverce.

5) Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky a = 22 cm, c = 12 cm a jehož výška je o 1 cm menší než délka ramene.

6) Zadané kružnici o poloměru r je opsán a vepsán pravidelný šestiúhelník. Vypočtěte poměr podobnosti těchto šestiúhelníků.

7) a) Vypočtěte velikost úhlu, který svírají tětivy, vzniklé spojením bodů 2, 7 a 1, 4 na ciferníku hodinek.
   b) Vypočtěte velikosti úhlů trojúhelníku, který dostaneme, spojíme-li na ciferníku hodin 4, 9, 11.

8) Vypočtěte poměr obsahů kruhových výsečí V_1, V_2. Obě výseče jsou 1/6 kruhu. Poloměr první výseče je r_1, poloměr druhé výseče je r_2= 2 r_1.

9) Proveďte rozbor a diskusi konstrukce trojúhelníku ABC z daných prvků:

   a) Δ ABC: c, v_c, γ
   b) Δ ABC: c, t_c, γ

10) Proveďte rozbor a diskusi konstrukce trojúhelníku ABC z daných prvků:

   a) Δ ABC: t_a, t_c, γ
   b) Δ ABC: v_b, α, ρ - poloměr kružnice trojúhelníku vepsané

13. Geometrická zobrazení v rovině, konstrukční využití

1) Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky se středem M a krajními body X,Y na hranici trojúhelníka ABC. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

2) Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li dáno: a = 5,5 cm, e : f = 3 : 4. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

3) Je dána přímka p a v jedné její polorovině kružnice k a bod C. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby $A \in k$ a $B \in p$. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

4) Do kružnice o poloměru 4 cm vepište obdélník, pro který platí: $a : b = 3 : 4$. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

5) Jsou dány soustředné kružnice $k\left(S, r = 4cm\right)$, $l\left(S, r = 3cm\right)$ a bod A, pro který platí: $\left|SA\right| = 2cm.$ Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby $B \in k$ a $C \in l$. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

6) Jsou dány kružnice k_1, k_2 s různými poloměry, které se protínají v bodech Q, R. Bodem Q veďte přímku, která vytíná na obou kružnicích tětivy shodné délky. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

7) Sestrojte společné tečny kružnic k_1, k_2, je-li dáno: $k_1(S_1, 3{,}5cm)$, $k_2(S_2, 1{,}5cm)$, $|S_1S_2| = 6{,}5$ cm. Proveďte rozbor v náčrtku úlohy.

8) Jsou dány přímky p, s, na přímce p bod P. Sestrojte pravidelný šestiúhelník se středem na přímce s a jednou stranou s vrcholem P na přímce p. [otáčení]

9) Je dána kružnice, vně bod Q. Sestrojte přímku, která prochází bodem Q a protíná kružnici v bodech A, B tak, že $|QB| = 3|QA|$.

10) Je dána kružnice, uvnitř bod Q. Sestrojte tětivu kružnice, která prochází bodem Q a je jím dělena v poměru 1 : 2.

14. Trigonometrie

1) a) Obvod trojúhelníka je 35 cm, délky stran jsou c =12 cm, a =11 cm. Uspořádejte jeho úhly podle velikosti, ale neurčujte je výpočtem.
   b) Jsou dány rozměry: a = 6 cm, b =10 cm. Určete, jakých hodnot může nabývat třetí strana trojúhelníka ABC.

2) a) V trojúhelníku známe velikosti úhlů: $\alpha = 45°, \beta = 60°, \gamma = 75°$. Určete poměr délek a:b v trojúhelníku.
   b) Je dán poměr délek v trojúhelníku ABC a:b:c=2:4:5. Vypočtěte velikosti úhlů v tomto trojúhelníku.

3) Tři síly 25 N , 36 N , 29 N jsou v rovnováze . Určete velikost některého z úhlů , které svírají vektory těchto sil.

4) a) Určete početně i graficky: a, b, c, v_C v pravoúhlém trojúhelníku ABC, je-li $c_a = 4,\ c_b = 9$
   b) Určete početně i graficky: a, b, c, v_C v pravoúhlém trojúhelníku ABC, je-li $c_a = 4,\ a = 5$.

5) Je dán obdélník ABCD, a=16cm, b=12cm. Bod A_1 je pata kolmice sestrojená z A na úhlopříčku BD. Vypočtěte velikost AA_1 a velikost DA_1 .

6) Vypočtěte obvod rovnoběžníku, jsou-li dány velikosti jeho úhlopříček e = 7 cm, f = 5 cm a úhlu jimi sevřeného $\varepsilon = 75^0 34'$. [17]

7) Je dána kružnice $k(S, r = 3cm)$ a bod X tak, že $|SX| = 9cm$. Z bodu X jsou sestrojeny tečny ke kružnici k s body dotyku T, Q. Vypočtěte velikost XT, velikost TQ a vzdálenost bodu S od spojnice bodů TQ.

8) Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 50 m, t_a = 45 m, t_b = 36 m.
[b=58,9m, c=42,8cm, $\alpha=56^0 14'$, $\beta=78^0 25'$, $\gamma=45^0 21'$]

9) Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého místa A ve výškovém úhlu $\alpha = 39° 25'$. Přijdeme-li směrem k jeho patě o 50 m blíž na místo B, vidíme z něho vrchol věže ve výškovém úhlu $\beta = 58° 42'$. Jak vysoká je věž?

10) Na vrcholu kopce stojí rozhledna 30 m vysoká. Její patu a vrchol vidíme z určitého místa v údolí pod výškovými úhly $\alpha = 28°\ 30'$ a $\beta = 30°\ 40'$. Jak vysoko je vrchol kopce nad horizontální rovinou pozorovacího místa?

15. Polohové a metrické úlohy v prostoru

1) Zobrazte krychli ABCDEFGH a její řez rovinou ρ = XYZ. X je střed hrany EH, Y střed hrany AE, Z leží na polopřímce DC tak, že C je střed úsečky DZ.

2) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV. Sestrojte řez jehlanu rovinou ρ = MNP, jestliže M leží na polopřímce VB, $|VM| = \frac{4}{3}|VB|$, N je střed úsečky BC, P leží na úsečce DV, $|DP| = 3|VP|$.

3) Je dána krychle ABCDEFGH. Sestrojte společnou průsečnici rovin α, β, jestliže: $\alpha = \leftrightarrow ACF$ a $\beta = \leftrightarrow BMS_{AD}$ a $M \in CG \wedge |CM|:|MG| = 4:1$.

4) Je dána krychle ABCDEFGH, na polopřímce DH leží bod P tak, že $|DP| = \frac{4}{3}|DH|$ a na polopřímce FB leží bod Q tak, že $|FQ| = \frac{3}{2}|FB|$.Určete průnik přímky PQ s krychlí.

5) a) Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a, bod Z je střed hrany EF. Určete odchylku přímek AZ, BG.

   b) Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Určete odchylku rovin BDG a ABC.

6) Pravidelný čtyřboký jehlan má hranu podstavy a, výšku $v = \frac{3}{2}a$.

   a) Vypočtěte odchylku přímek AC, VS_{AB}

   b) Vypočtěte odchylku přímky BS_{DV} a roviny dolní podstavy.

7) Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočtěte odchylku přímky p = FC od roviny XYB, kde X je střed hrany AE, Y je střed hrany DH.
[$39^0 14'$]

8) Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH, $a = b = 4cm$, $c = 6cm$.
Určete vzdálenost bodu B od úhlopříčky AG.

9) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV s hranou a, výškou $v = \frac{3}{2}a$.
Určete vzdálenost bodů S_{AC}, S_{CV}.

10) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV, a = 6 cm, v = 4 cm. Vypočtěte vzdálenost středu podstavy S od roviny BCV. [2,4]

16. Objemy povrchy těles

1) Podstavou hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami v poměru 3 : 4. Výška hranolu je o 2 cm menší než delší odvěsna trojúhelníkové podstavy. Vypočtěte objem hranolu, je-li jeho povrch 468 cm^2.

2) Kvádr má objem 810 cm^3, jeho rozměry hran jsou v poměru 2 : 3 : 5. Vypočtěte povrch kvádru.

3) Vypočtěte objem pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana má délku 4 cm a boční stěna svírá s podstavou úhel 60°.

4) Poměr pláště válce k jeho podstavě je 5 : 3. Úhlopříčka osového řezu je 39 cm. Určete objem válce.

5) Je dán pravidelný rotační kužel o výšce 10 cm, jehož strana (povrchová přímka) svírá s podstavou úhel 30°. Určete objem tělesa.

6) Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 3 a 4 cm se otáčí kolem (svislé) přepony. Vypočítejte objem takto vzniklého tělesa.

7) Dutá polokoule má vnitřní průměr 28 cm. Kolik vody je v ní, jestliže se naplní do výšky 10 cm?

8) Vypočtěte objem a povrch koule, která má poloměr 5 cm. Jak se změní objem a povrch, jestliže se poloměr zvětší dvakrát?

9) Vypočtěte, kolik km^2 zemského povrchu leží v oblasti za polárním kruhem? ($R = 6378$km, $\varphi = 66{,}5°$)

10) Do krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou (strana čtvercové podstavy je 6 cm, výška kvádru 4 cm) dáme kouli o poloměru 3 cm. Vypočtěte objem kulové úseče, která je vně krabice.

17. Komplexní čísla, rovnice v C

1) Upravte: a) $1+i^{-2}+i^{-4}+i^{-6}+i^{-8}$
b) $i.i^2.i^3.i^4.i^5...i^9.i^{10}$
c) $(2+i+3i^2-i^3-i^4+5i^5)\cdot(i-i^2+3i^3-5i^4)$

2) Upravte: a) $\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ c) $\left|\dfrac{|7i|+(1-i)}{i-\left|\sqrt{5}+2i\right|}\right|$

3) Vypočtěte, upravte, zvolte vhodný tvar komplexního čísla:

a) $\left[(1-i)\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\right]^4$

b) $\left[(1+i)\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)\right]^4$

4) Vypočtěte, výsledek vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru:

$\left(\sqrt{\frac{1}{2}z+z^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}z-z^2}\right)$, kde z = $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

[1+$\frac{1}{2}$i; $\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\cos 26^0 34' + i\sin 26^0 34'\right)$]

5) Určete číslo komplexně sdružené k číslu $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

6) Řešte v C: a) $x^3-1=i$
b) $x^3=8i$
c) $x^3-1+i\sqrt{3}=0$

7) Řešte v C: a) $ix^2+\left(-1-3i\right)x+3+4i=0$
b) $2ix^2-8ix-4+8i=0$

8) Řešte v C: a) $ix^2+\left(1-4i\right)x-5+5i=0$
b) x^2 - (5-3i)x + 4 - 7i = 0 2-i; 3-2i

9) Určete, pro jaké hodnoty parametru p (p $\in$ R) má rovnice imaginární kořeny:

$p\left(x^2+1\right)-3=x\left(x-2p\right)$

10) Určete, pro jaké hodnoty parametru p (p $\in$ R) má rovnice imaginární kořeny:

$x^2+2px-p+2=0$

18. Vektorová algebra, analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

1) Jsou dány body A,B. $A[3,-1], B[-2,-2]$.
   a) Určete směrový a normálový vektor přímky.
   b) Najděte různé způsoby vyjádření (rovnice) přímky AB.
   c) Najděte vyjádření úsečky AB.

2) Určete vzájemnou polohu přímek. Jsou-li rovnoběžné, určete jejich vzdálenost, jsou-li různoběžné, určete souřadnice průsečíku a jejich odchylku.
   a) $\leftrightarrow p: 2x-3y+4=0, \quad \leftrightarrow q: 3x+4y-11=0$
   b) $\leftrightarrow a: x+2y-3=0, \quad \leftrightarrow b: x=7-2t, y=-1+t$, tєR

3) Určete obecnou rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek p,q a je kolmá k přímce r.
   $\leftrightarrow r: 3x-4y+7=0,$
   $\leftrightarrow p: x-2y+5=0, \leftrightarrow q: 5x+3y-1=0$

4) Určete obecnou rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek p,q a je kolmá k ose I. a III.kvadrantu $\leftrightarrow p: 3x-7y+9=0, \leftrightarrow q: 5x+3y-29=0$.

5) Je dán trojúhelník ABC, $A[-1,4], B[2,-2], C[5,-1]$.
   Vyjádřete: a) parametricky těžnici t_a
   b) těžiště T
   c) obecnou rovnici přímky, na níž leží výška $v_{a.}$

6) Vypočítejte souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC , jestliže je dán vrchol $C[-2,6]$ a obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky $v_a: 4x-y+3=0$, $v_b: 2x+3y+1=0$.

7) Vypočítejte souřadnice vrcholů rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB, jestliže obecná rovnice přímky, na které leží těžnice t_a je: $4x+3y+5=0$, těžiště $T[4,-7], S_{AB}[1,2]$.

8) Určete souřadnice bodu C´, který je s bodem C souměrný podle přímky AB, jestliže $C[3,6], A[-2,1], B[-1,-2]$.

9) Napište rovnici přímky p´, která je s přímkou $p: 2x+y-5=0$ středově souměrná podle středu $S[-3,2]$.

10) a) Na ose y urči bod A tak, aby měl od bodu $B[-6,-5]$ vzdálenost d =10.
   b) Na přímce AB, kde $A[-3,2], B[2,-3]$ urči bod M tak, aby platilo $|AM| = \frac{2}{3}|BM|$.

19. Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru

1) a) Určete parametrické vyjádření těžnice t_a trojúhelníku ABC, $A[1,2,3], B[0,2,4], C[6,8,10]$.

b) Určete parametrické vyjádření polopřímky $\overrightarrow{AB}$, je-li: $A[1,2,3,], B[1,1,1,]$.

c) Určete parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $A[1,2,3]$ a je rovnoběžná s osou x.

2) a) Vypočtěte normálový vektor roviny, která má směrové vektory: $\vec{u}=(1,1,6)$, $\vec{v}=(1,-1,4)$

b) Určete obecnou rovnici roviny, je-li dán její bod A a vektory roviny $\vec{u}$ a $\vec{v}$: $A[2,2,2]$, $\vec{u}=(3,-3,5), \vec{v}=(3,-2,0)$

c) Najdi obecnou rovnici roviny, je-li její parametrické vyjádření: $x=t+s, y=t-s, z=5+6t+4s$, t,sϵR

3) Určete, jakou vzájemnou polohu mají přímky a,b , jsou-li různoběžné, určete souřadnice průsečíku: $\leftrightarrow a: x=2+3t, y=4+2t, z=6+t$, tϵR
$\leftrightarrow b: x=1+6s, y=6-4s, z=7-2s$, sϵR

4) Určete, jakou vzájemnou polohu mají přímka p a rovina ρ:
$\leftrightarrow p: x=2+4t, y=-1+t, z=2-t$, tϵR $\rho: 4x+y-z+13=0$

5) Určete rovnici průsečnice daných rovin:
$\alpha: 6x+3y-2z-21=0,\ \beta: 3x-2y+6z=0$

6) a) Určete odchylku přímek p, q.
$p=\{[x=2+t; y=3+2t; z=1-t]; t\in R\}$ $q=\{[x=3-s; y=2+3s; z=4-s]; s\in R\}$

b) Určete odchylku přímky p a roviny ρ.
$p=\{[x=2+t; y=3+2t; z=1-t]; t\in R\}$ $\rho: x-2y+z-5=0$

c) Určete odchylku rovin α, β,
$\alpha: 6x+3y-2z-21=0,\ \beta: 3x-2y+6z=0$.

7) Určete vzdálenost bodu M a přímky p, je-li $M[1,0,5]$, $p=\{x=t; y=1-t; z=2t; t\in R\}$.

8) Jsou dány body $A[1,2,3], B[-3,0,-2]$.
Na ose x určete bod X tak,aby platilo: $|AX|=|XB|$.

9) Určete souřadnice bodu $\overline{M}$, který je s bodem $M[1,0,2]$ souměrný podle roviny $\alpha: x-2y-z+13=0$.

10) Určete souřadnice bodu C´, který je obrazem bodu $C[-3,0,2]$ v osové souměrnosti dané přímkou AB, jestliže $A[0,-2,4], B[-5,3,-6]$.

20. Analytická geometrie kuželoseček

1) Napište obecnou rovnici kružnice. která prochází bodem A[4; 4] a průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$ s přímkou $x + y = 0$. [$x^2+y^2-3x-3y-8=0$]

2) Je dána kružnice: $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$. Napište rovnice tečen této kružnice, které jsou:
   a) kolmé k přímce $q: 2x - y + 6 = 0$
   b) rovnoběžné s přímkou $r: 2x - y - 6 = 0$.

3) Rozhodněte, zda je $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ rovnicí elipsy. Pokud ano, určete střed, excentricitu, poloosy.

4) Je dána elipsa $9x^2 + 25y^2 = 225$. Napište rovnici té tečny elipsy, která má odchylku od kladné části osy x 45°.

5) Je dána elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod $Q[0,-3]$. Napište rovnice tečen procházejících bodem Q a vypočtěte odchylku těchto tečen.

6) Určete souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídící přímky paraboly: $x^2 - 6x + 4y + 3 = 0$.

7) Určete rovnice všech přímek, které procházejí bodem paraboly $T\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ a mají s ní jediný společný bod. Rovnice paraboly je: $y^2 = 16x$.

8) Dokažte, že bod $Q[0,-1]$ je vnějším bodem paraboly $(y-1)^2 = 4.(x-3)$ a napište rovnici tečny, která prochází bodem Q.

9) Vyšetřete danou rovnici, je-li obecnou rovnicí hyperboly. Pokud ano, určete excentricitu, souřadnice středu, souřadnice ohnisek, rovnice asymptot a hyperbolu načrtněte.
   $4x^2 - 9y^2 + 18y - 45 = 0$

10) Najděte rovnice všech přímek, které mají s hyperbolou $x^2 - 2y^2 = 2$ jediný společný bod a procházejí jejím bodem $A[2,1]$.

21. Kombinatorika a pravděpodobnost

1) Uveďte podmínky a upravte:

a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} =$ b) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!} =$

2) Uveďte definiční obor a řešte rovnice:

a) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9$ b) $\binom{4}{3}\binom{x+1}{x-1} - \binom{5}{3}\binom{x+1}{x} + \binom{3}{2}\binom{4}{2} = 0$

3) a) Pro které x se pátý člen rozvoje výrazu $\left(4x^{-\frac{1}{2}} - 2^{-1}\right)^{10}$ rovná číslu 105 ? 8

b) Pro které x se sedmý člen rozvoje výrazu $\left(\sqrt[3]{4-2x} + \sqrt[6]{3-2x}\right)^{9}$ rovná číslu 168 ? 1

4) a) Určete počet všech přirozených, nejvýše trojciferných čísel, které lze sestavit z číslic 1,2,3,4,5.

b) Sestavujeme oddílovou vlajku. Dohodli jsme se, že jí budou tvořit dva nebo tři vodorovné různobarevné pruhy. Máme k dispozici tyto barvy: bílou, červenou, modrou a zelenou. Kolik vlajek lze vytvořit?

5) Třídu 4.A tvoří 25 studentů, 15 dívek a 10 chlapců. Mezi studenty této třídy je i Petr L. Kolika způsoby lze vybrat:
   a) čtyřčlenné sportovní družstvo
   b) čtyřčlennou štafetu
   c) čtyřčlennou chlapeckou štafetu
   d) čtyřčlennou chlapeckou štafetu, aby první úsek běžel Petr L.
   e) čtyřčlennou chlapeckou štafetu, aby jeden úsek běžel Petr L.
   f) čtyřčlennou chlapeckou štafetu, aby žádný úsek neběžel Petr.

6) Sestavujeme čísla z číslic 0,1,2,3,4,5. Kolik z nich lze sestavit přirozených čísel:
   a) čtyřciferných,
   b) čtyřciferných s různými číslicemi,
   c) čtyřciferných sudých čísel s různými číslicemi?

7) Ve třídě je 25 studentů, čtyři z nich se neučili a neumí látku z minulé hodiny. Učitel se chystá zadat stejný test z poslední látky čtyřem náhodně vybraným studentům. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými studenty budou:

   a) všichni, kteří se neučili, b) nejvýše jeden z těch, kteří se neučili

8) Ve třídě je 25 studentů, mezi nimi Bára a Pavla. Učitel si náhodně vybere 2 studenty. S jakou pravděpodobností mezi vybranými studenty:

   a) bude Bára b) bude Bára a nebude Pavla

   c) bude buď Bára a nebo Pavla d) bude Bára nebo Pavla.

9) V bedně je 10 součástek, 3 jsou vadné. Vybereme 4 součástky. Jaká je pravděpodobnost, že:
   a) žádná nebude vadná
   b) právě jedna bude vadná
   c) nejvýše dvě budou vadné.

10) Student není připraven na test, který se skládá z 20 otázek s volbou ze 4 odpovědí, z nichž jediná je správná. Student uspěje, jestliže správně odpoví alespoň 18 otázek. Jak je to pravděpodobné?

22. Posloupnosti a řady

1) Je dána posloupnost $\left(2n-8\right)_{n=1}^{\infty}$
   a) Rozhodněte, zda je geometrická či aritmetická a svoje tvrzení dokažte.
   b) Určete součet prvních deseti členů této posloupnosti.

2) Je dána posloupnost $\left(2^{n}3^{2-n}\right)_{n=1}^{\infty}$

   a) Rozhodněte, zda je geometrická či aritmetická a svoje tvrzení dokažte.
   b) Určete součet prvních deseti členů této posloupnosti.

3) a) Je dána aritmetická posloupnost: $a_6 = \frac{5}{9}.a_{16}$, $s_{11} = 110$. Určete a_1, d.

   b) Je dána aritmetická posloupnost: $a_6 = \left(-\frac{1}{3}\right)a_{16}$, $s_{26} = 104$. Určete a_1, d.

4) a) Je dána geometrická posloupnost členy: $a_3 = -\sqrt{20}$, $a_4 = 10$. Určete její a_1 ,q.
   b) Určete n, q v geometrické posloupnosti, je-li dáno $a_1 = 18$, $a_n = 13122$, $s_n = 19674$.
   [n=7, q=3]

5) Určete, kolik musíte sečíst po sobě jdoucích čísel dělitelných sedmi, aby součet byl větší než 1050. První sčítanec je 7.

6) Do jisté banky vložíme na 2% úrok 100 000 Kč. Úrokovací období je jeden rok.
   Kolik peněz budeme mít na účtu: a) za rok
   b) po 3 letech?

7) Určete součet řady (pokud existuje):
   a) $\sum_{n=1} 10^{-n}$
   b) $\sum_{n=1} \frac{5}{2^n}$
   c) $\sum_{n=1} \frac{1}{2^n}$

8) Vypočtěte:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-3n^2}{2-2n^2} =$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+1}{5^n} =$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3n}{2n-1} =$

9) Vypočtěte:
   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!-(n+1)!}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\ +n^2}{(3n-2)(1-n^2)} =$

10) Řešte v R: a) $1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+.....=\frac{4x-3}{3x-4}$ 6

    b) $(x + 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n = \frac{3x+2}{5}$ $-\frac{3}{2}$

23. Limita a derivace funkce

1) Vypočtěte:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x+5}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{3x-2-x^2}{8-2x-x^2}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$

2) Vypočtěte:

a) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^7+1}{x^3+2x^4}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{6x^2-6}{x+1}$

3) Vypočtěte:

a) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{3x^2-x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$ c) $\lim_{x\to\infty}\left(x-5x^5+4x^4-3x^3\right)$

4) Vypočtěte:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{x}$ c) $\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{3-\sqrt{3x}}$

5) Určete asymptoty grafu funkce:

a) f: $y=\frac{x^2+1}{x+3}$ b) g: $y=\frac{x}{2x-1}+x$

6) Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=\frac{x+1}{2x-1}$ b) $y=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}.\sqrt{x^7}}$ c) $y=tg^3 2x$

7) Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y=\frac{2x^2-1}{x+1}$ b) $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ c) $y=\sin^3 x^2$

8) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f: $y=\frac{2x^2-1}{x+1}$ v bodě $T\left[-\frac{1}{2},?\right]$.

9) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f: $y=\frac{x+1}{2x-1}$ v bodě $T\left[-2,?\right]$.

10) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f: y = $\frac{x}{x+1}$, která s osou x svírá úhel $\frac{\pi}{4}$.

[x-y=0; x-y+4=0]

24. Vyšetřování průběhu funkce

U všech příkladů vyšetřete průběh funkce:

1) f: $y = 3x^3 + 12x^2 + 12x$

2) f: $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$

3) f: $y = x^4 - 6x^2 + 8$

4) f: $y = x + x^{-1}$

5) f: $y = x^4 - 2x^3$

6) f: $y = \frac{1}{x^2} - x$

7) f: $y = \frac{2x}{x^2 - 4}$

8) f: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

9) f: $y = \frac{x^2}{x - 1}$

10) f: $y = \frac{x^3}{6x - 12}$

25. Primitivní funkce, určitý integrál

1) Určete primitivní funkci:

a) $\int \frac{x^3 - 27}{3 - x}\,dx$ b) $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}\,dx$ c) $\int \frac{1}{1 + \cos 2x}\,dx$

2) Určete primitivní funkci:

a) $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 14}{x - 2}\,dx$ b) $\int \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\,dx$ c) $\int \sqrt{t^3 \sqrt{t}}\,dt$

3) Určete primitivní funkci:

a) $\int 4x\sqrt{x^2 + 1}\,dx$ b) $\int (2x - 3) \cdot \cos x\,dx$ c) $\int \frac{1}{x^2} \ln x\,dx$

4) Určete primitivní funkci:

a) $\int 3x\left(x^2 - 1\right)^6 dx$ b) $\int 2 \sin x \cos^3 x\,dx$ c) $\int e^x \sin x\,dx$

5) Určete obsah obrazce, který je ohraničen křivkami: $y = x$, $x^2 - 8x - 9y + 16 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

6) Určete obsah obrazce, který je ohraničen křivkami: $y = -3x^2 + 3$, $y = x^2 + 1$.

$$\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$$

7) Určete obsah obrazce, který je ohraničen křivkami: $y^2 = 16x$, $x^2 = 2y$.

$$\left[\frac{32}{3}\right]$$

8) Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$ a $y = x$ kolem osy x.

9) Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného čarami $y = \sqrt{2x + 1}$; $y = x - 1$, $x = 0$, $y = 0$ kolem osy x.

10) Určete objem tělesa, které vznikne rotací obrazce omezeného křivkami $y = x^2$, $x^2 + y - 1 = 0$ kolem osy x.

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\right]$$